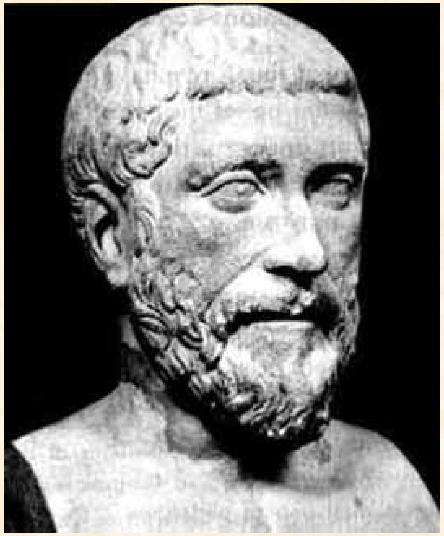
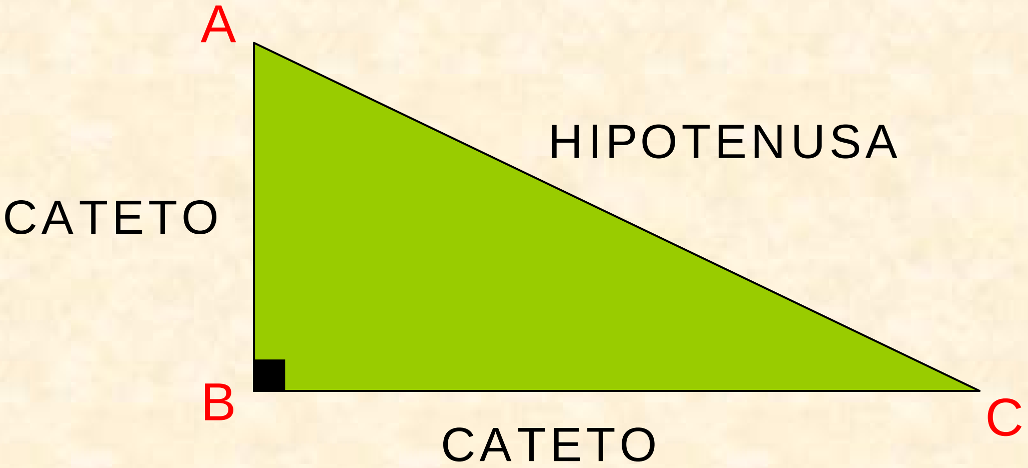
TRIGONOMETRIA CONTEMPORANEA

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

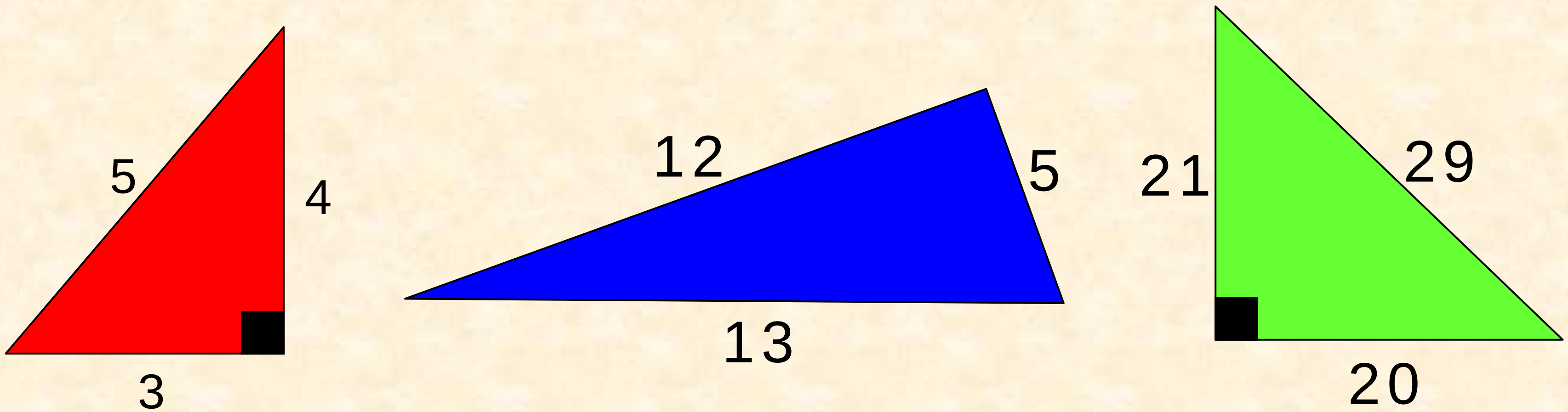
2

TEOREMA DE PITÁGORAS





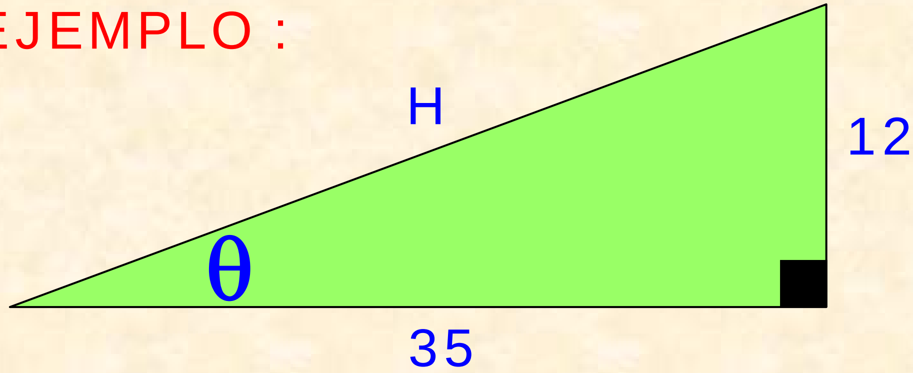
$$(\text{CATETO})^2 + (\text{CATETO})^2 = (\text{HIPOTENUSA})^2$$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ANGULOS AGUDOS

SENO $$\text{sen}q = \frac{\text{CatetoOpuestoaq}}{\text{Hipotenusa}}$$	COSENO $$\cos\theta = \frac{\text{CatetoAdyacentea}\theta}{\text{Hipotenusa}}$$
TANGENTE $$\tan\theta = \frac{\text{CatetoOpuestoa}\theta}{\text{CatetoAdyacentea}\theta}$$	COTANGENTE $$\cot\theta = \frac{\text{CatetoAdyacentea}\theta}{\text{CatetoOpuestoa}\theta}$$
SECANTE $$\sec\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{CatetoAdyacentea}\theta}$$	COSECANTE $$\csc\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{CatetoOpuestoa}\theta}$$

EJEMPLO :



TEOREMA DE PITÁGORAS

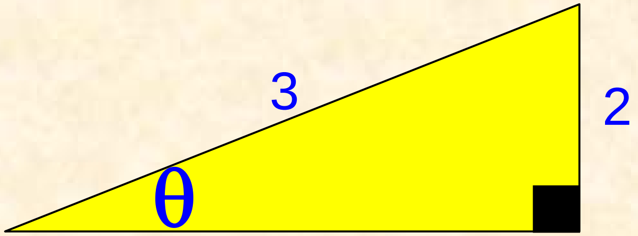
$$H^2 = 12^2 + 35^2$$

$$H = \sqrt{1369} = 37$$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{12}{37}$	$\tan\theta = \dfrac{12}{35}$	$\sec\theta = \dfrac{37}{35}$
$\cos\theta = \dfrac{35}{37}$	$\cot\theta = \dfrac{35}{12}$	$\csc\theta = \dfrac{37}{12}$

EJEMPLO :

Sabiendo que θ es un ángulo agudo tal que senθ=2/3.....



PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGOMOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\operatorname{sen}\theta\csc\theta = 1 \qquad \cos\theta\sec\theta = 1 \qquad \tan\theta\cot\theta = 1$$

EJEMPLOS

A) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}36^{o}} = \csc 36^{o}$

B) $\dfrac{1}{\cos 17^{o}} = \sec 17^{o}$

C) $\tan 49^{o}\cot 49^{o} = 1$

D) $\operatorname{sen}2\theta\csc 2\theta = 1$

E) $\cos 63^{o}\sec\theta = 1 \Rightarrow \theta = 63^{o}$

F) $\tan 2\phi\cot\theta = 1 \Rightarrow 2\phi = \theta$

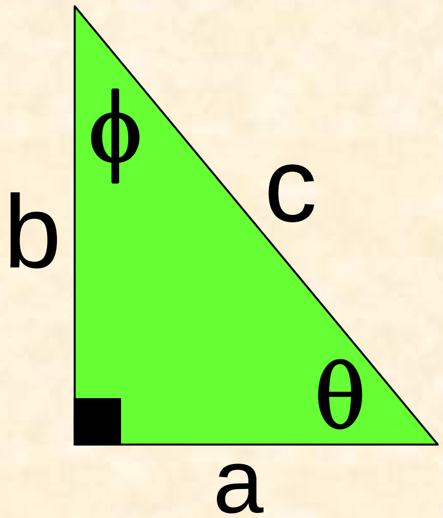
PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGOMOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

PROPIEDAD :

"LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE TODO ÁNGULO AGUDO SON RESPECTIVAMENTE IGUALES A LAS CO-RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE SU ÁNGULO COMPLEMENTARIO"

A LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS *SENO Y COSENO*
TANGENTE Y COTANGENTE ;SECANTE Y COSECANTE
SE LES DENOMINA :*CO-RAZONES TRIGONOMÉTRICAS*



$$\operatorname{sen}\theta = \cos\phi$$

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\phi$$

$$\tan\theta = \cot\phi$$

$$\cot\theta = \tan\phi$$

$$\sec\theta = \csc\phi$$

$$\csc\theta = \sec\phi$$

EJEMPLOS

A) $\operatorname{sen} 25^{o} = \cos 65^{o}$ .... $25^{o} + 65^{o} = 90^{O}$

B) $\tan 43^{o} = \cot 47^{o}$ .... $43^{o} + 47^{o} = 90^{O}$

C) $\sec 60^{o} = \csc 30^{o}$ .... $60^{o} + 30^{o} = 90^{O}$

D) $\operatorname{sen}\theta = \cos 20^{o}$

$\theta + 20^{o} = 90^{O} \Rightarrow \theta = 70^{o}$

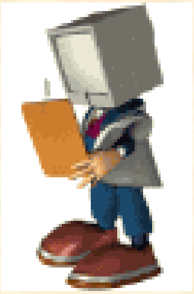
E) $\tan 5\alpha = \cot \alpha$

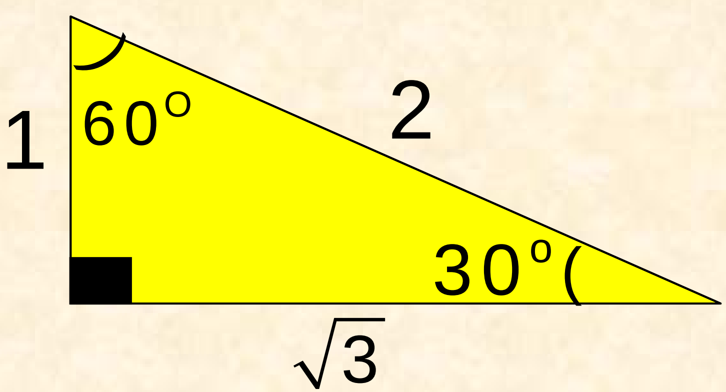
$5\alpha + \alpha = 90^{o} \Rightarrow \alpha = 15^{o}$

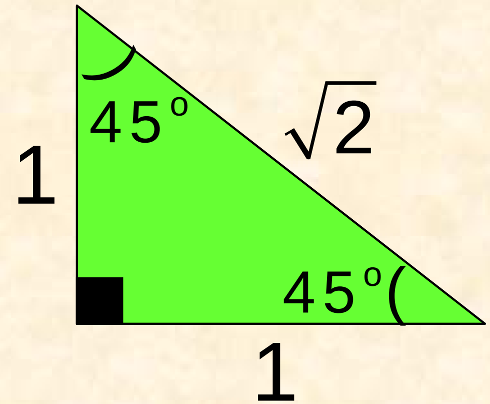
F) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\theta$

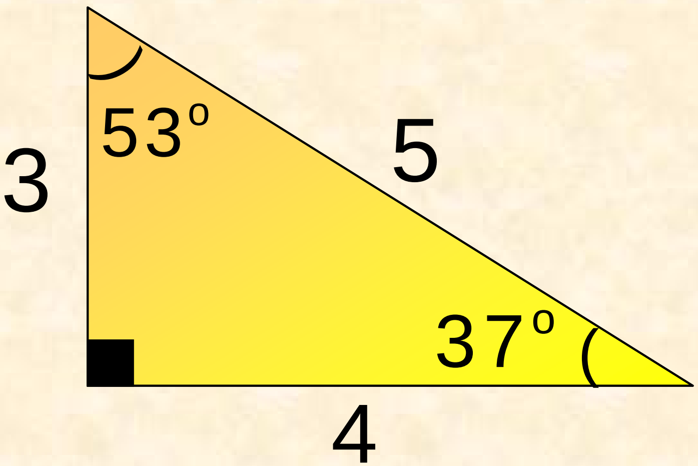
$$\theta + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{10}\,\mathrm{rad}$$

TRIÁNGULOS NOTABLES









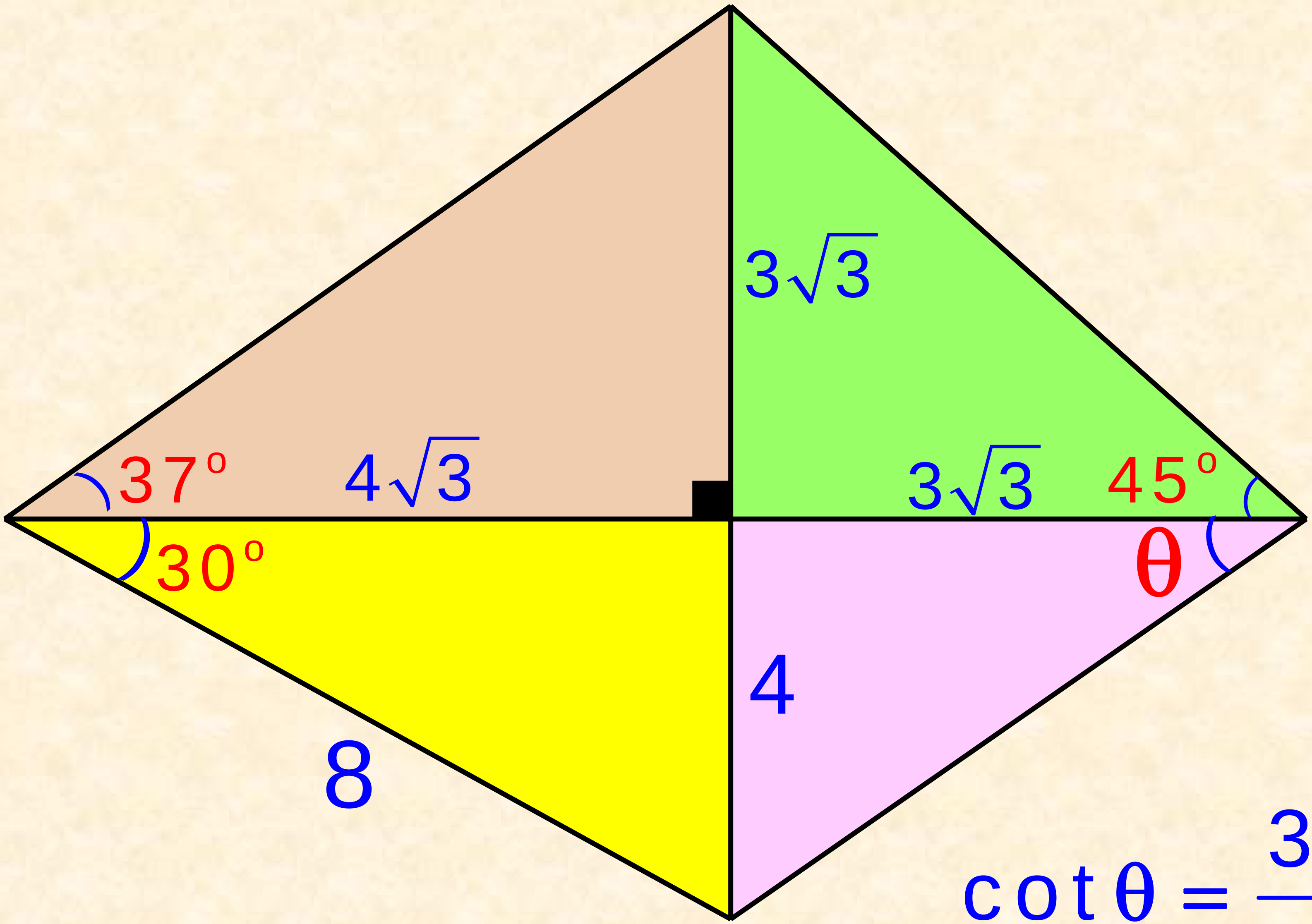
$$\text{sen}30^{o} = \frac{1}{2} \qquad \tan 60^{o} = \sqrt{3}$$

$$\sec 45^{o} = \sqrt{2} \qquad \cot 37^{o} = \frac{4}{3}$$

$$\tan 30^{o} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{x} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen}45^{o} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{x} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

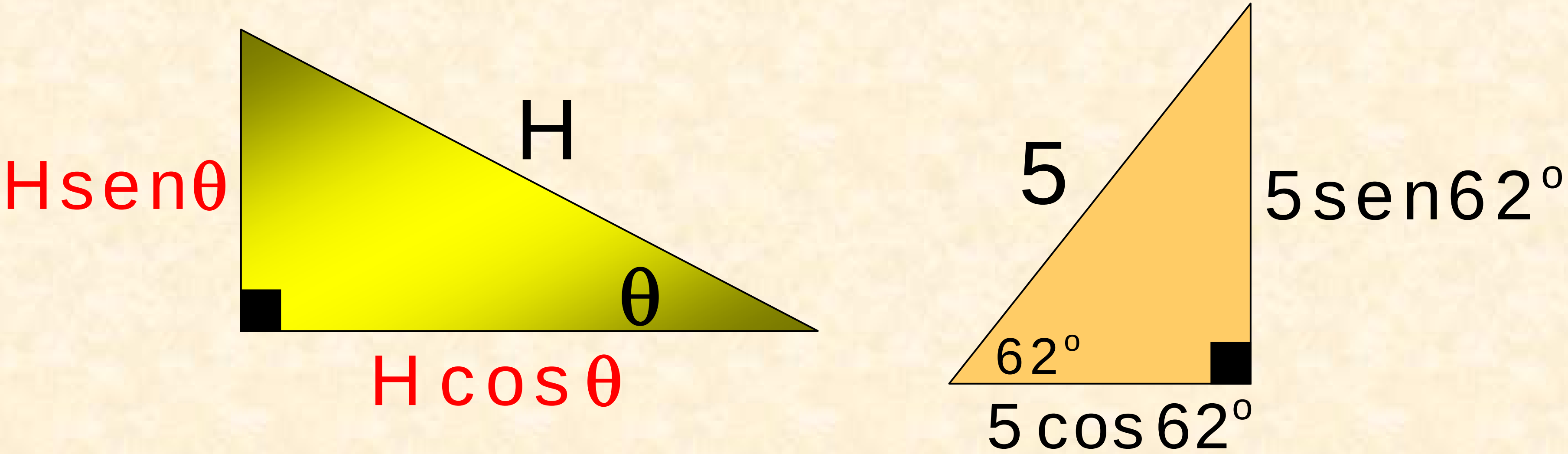
CALCULAR : $\cot\theta$



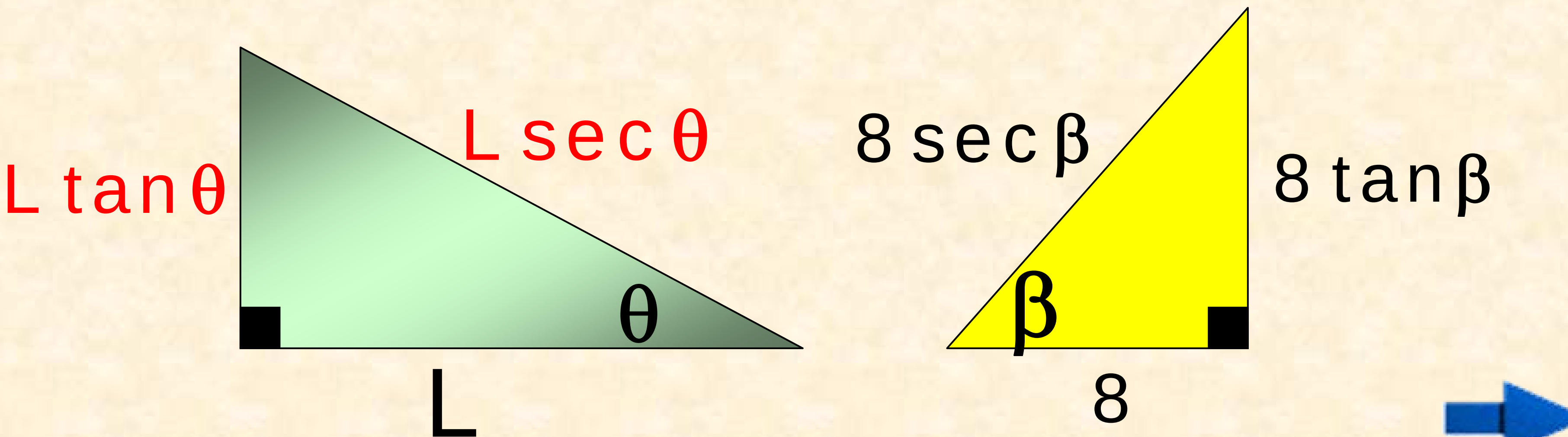
$$\cot\theta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

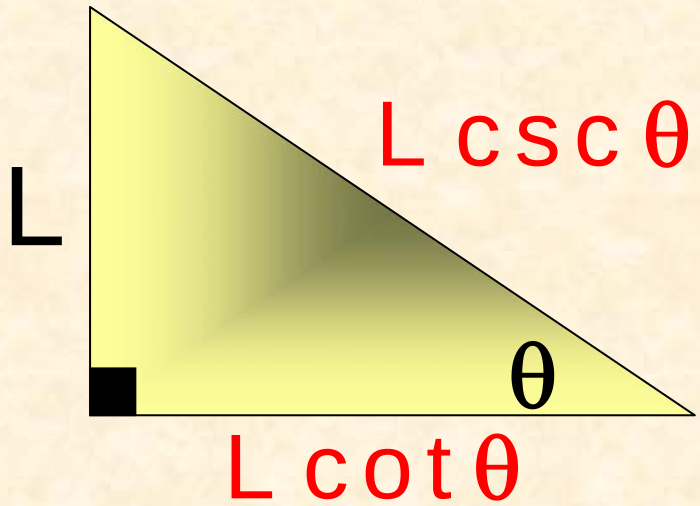
CASO 1 : DATOS , HIPOTENUSA y ÁNGULO AGUDO θ

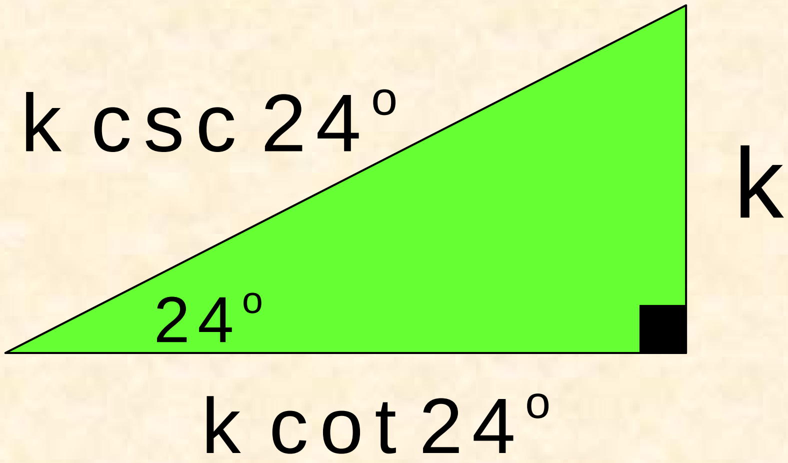


CASO 2 : DATOS ; CATETO ADYACENTE Y ÁNGULO AGUDO θ



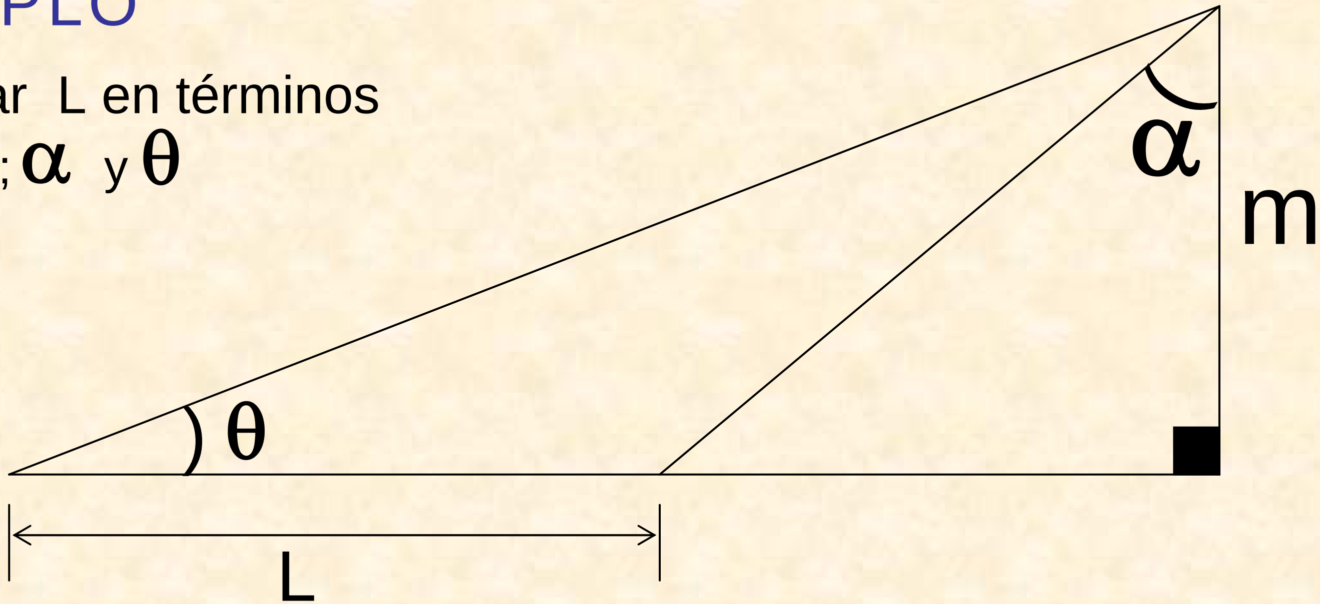
CASO 3 : DATOS; CATETO OPUESTO y ÁNGULO AGUDO θ



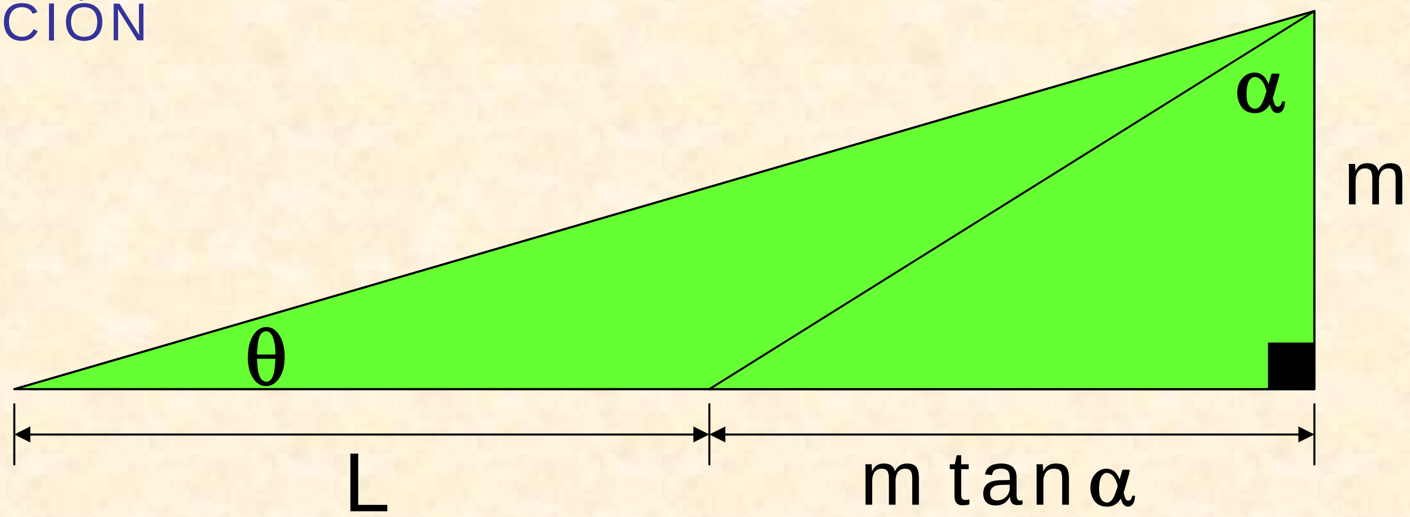


EJEMPLO

Calcular L en términos de m ; α y θ



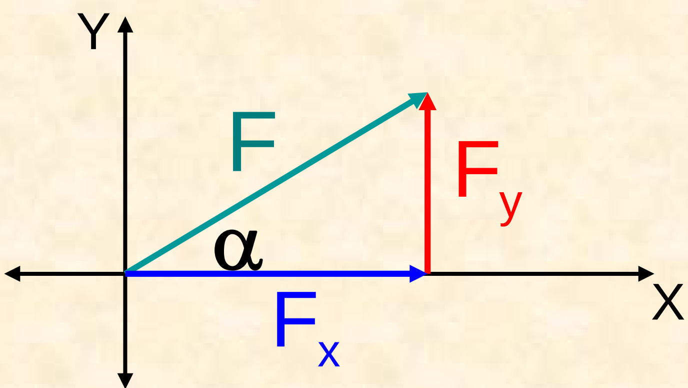
SOLUCIÓN



$$\frac{L + m\tan\alpha}{m} = \cot\theta \Rightarrow L + m\tan\alpha = m\cot\theta$$

$$L = m\cot\theta - m\tan\alpha \Rightarrow L = m(\cot\theta - \tan\alpha)$$

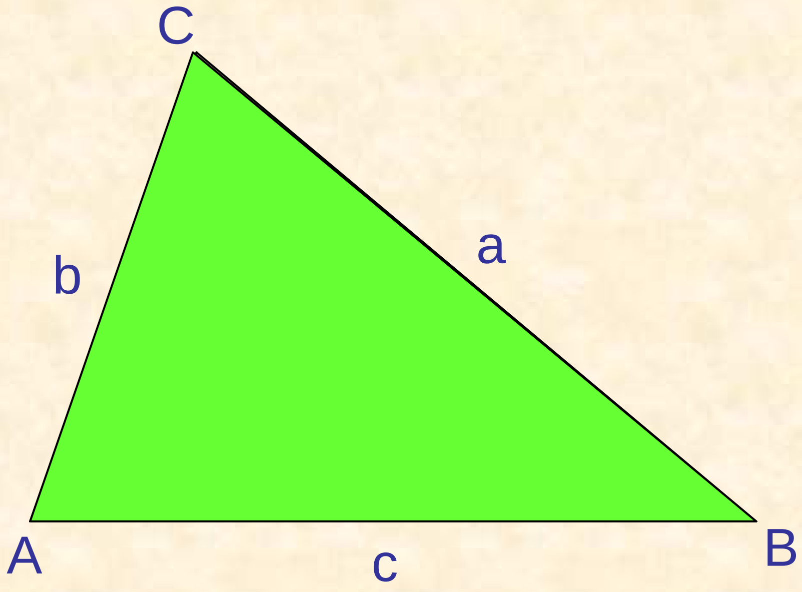
NOTA : DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR



$$F_x = F\cos\alpha$$

$$F_y = F\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO

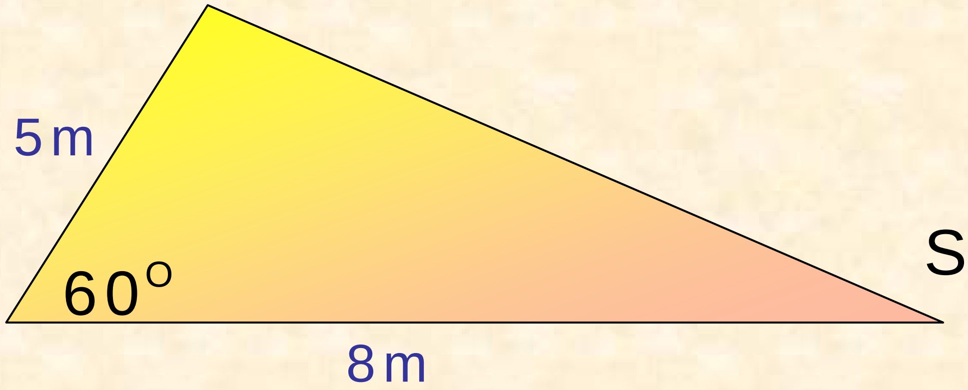


$$S = \frac{ab}{2} \operatorname{sen} C$$

$$S = \frac{bc}{2} \operatorname{sen} A$$

$$S = \frac{ac}{2} \operatorname{sen} B$$

EJEMPLO

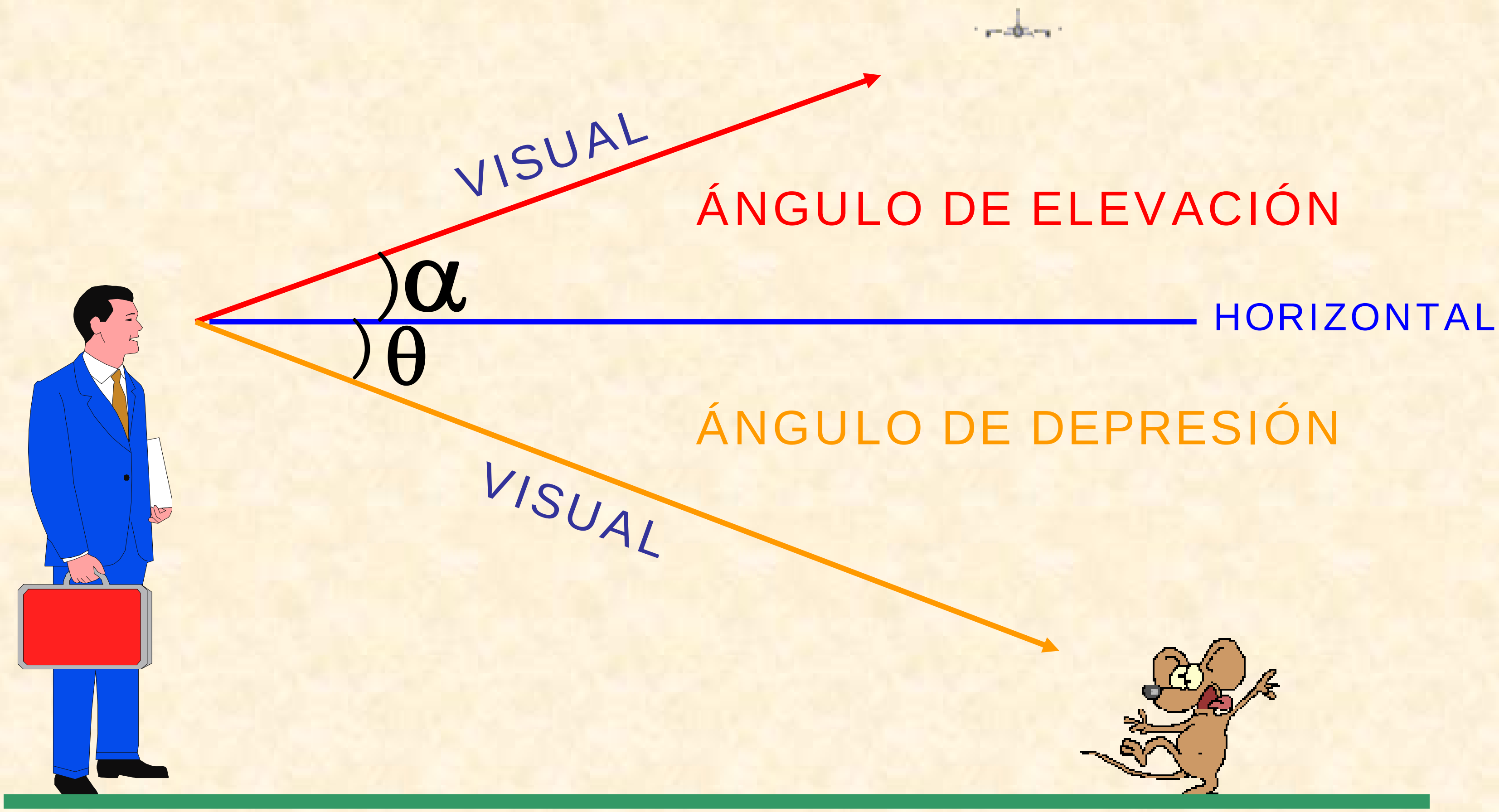


$$S = \frac{(5)(8)}{2} \operatorname{sen} 60^{o}$$

$$S = \frac{(5)(8)}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3}\,m^2$$

ÁNGULOS VERTICALES

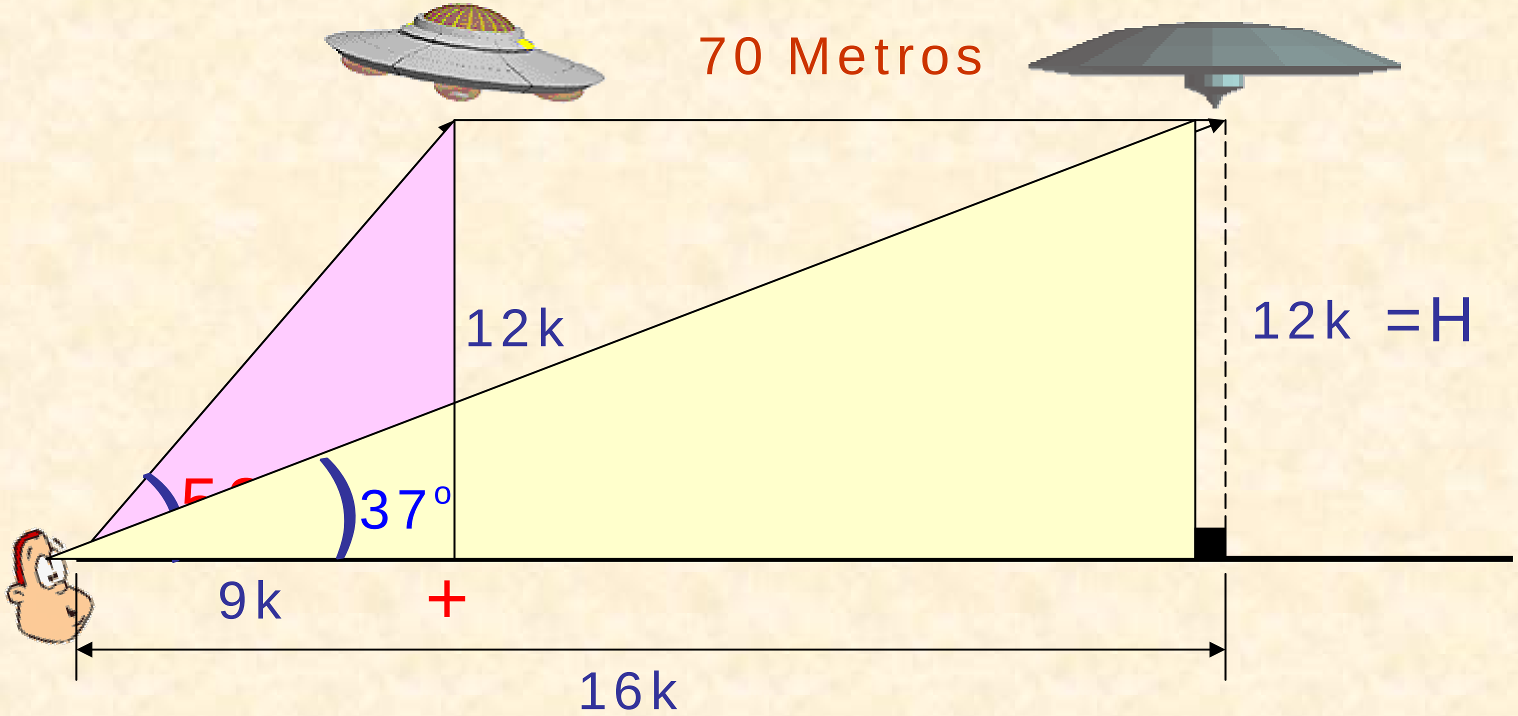
Los ángulos verticales son ángulos agudos contenidos en un plano vertical y formados por dos líneas imaginarias llamadas horizontal y visual



EJEMPLO :

Una persona observa en un mismo plano vertical dos ovnis volando a una misma altura con ángulos de elevación de 53^0 y 37^0 si la distancia entre los ovnis es de 70m ¿A qué altura están los ovnis?

SOLUCIÓN



9k +70 = 16k ➡ k = 10 ➡ H = 120

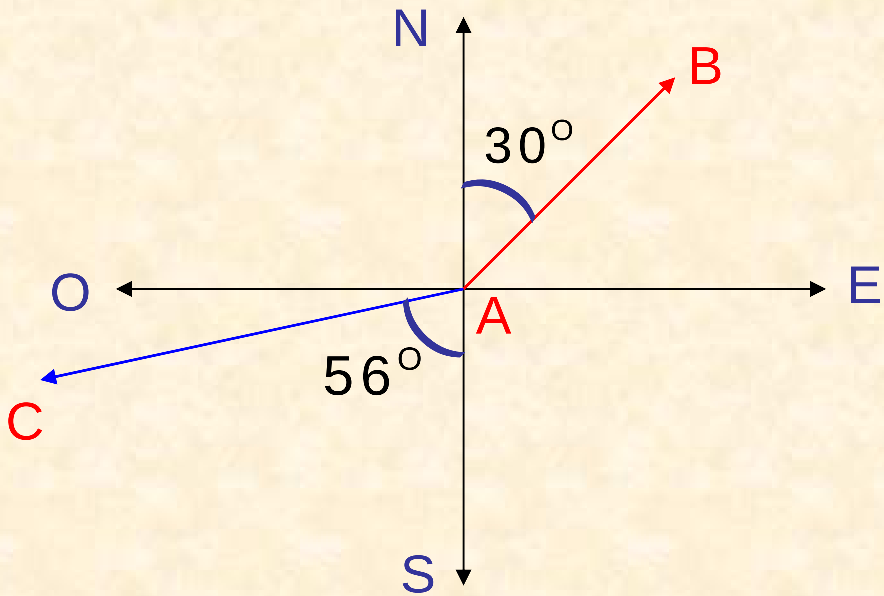
ÁNGULOS HORIZONTALES

Los ángulos horizontales son ángulos agudos contenidos en un plano horizontal, se determinan tomando como referencia los puntos cardinales norte(N) , sur(S) , este(E) y oeste(O).

DIRECCIÓN

La dirección de B respecto de A es $N30^{o}E$ o $E60^{o}N$

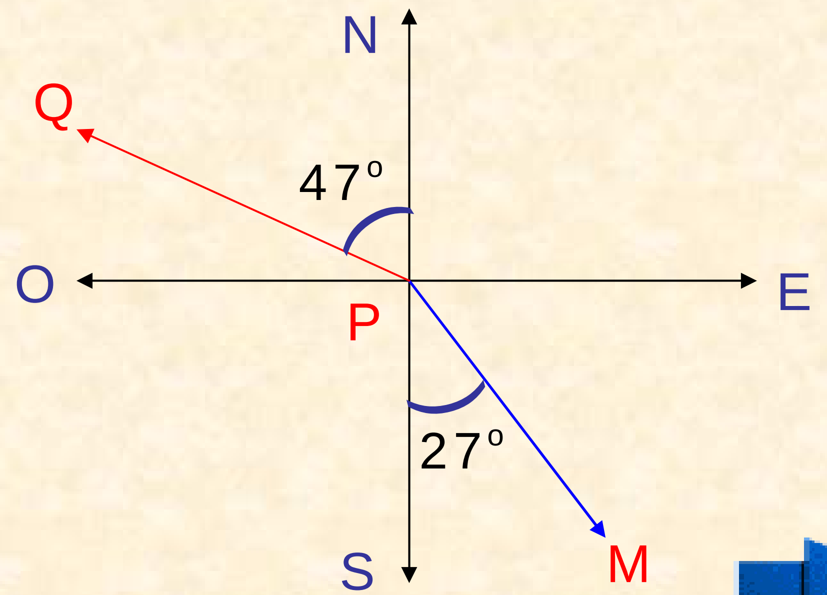
La dirección de C respecto de A es $S56^{o}O$ o $O34^{o}S$



RUMBO

El rumbo de Q respecto de P 47^{o} al oeste del norte

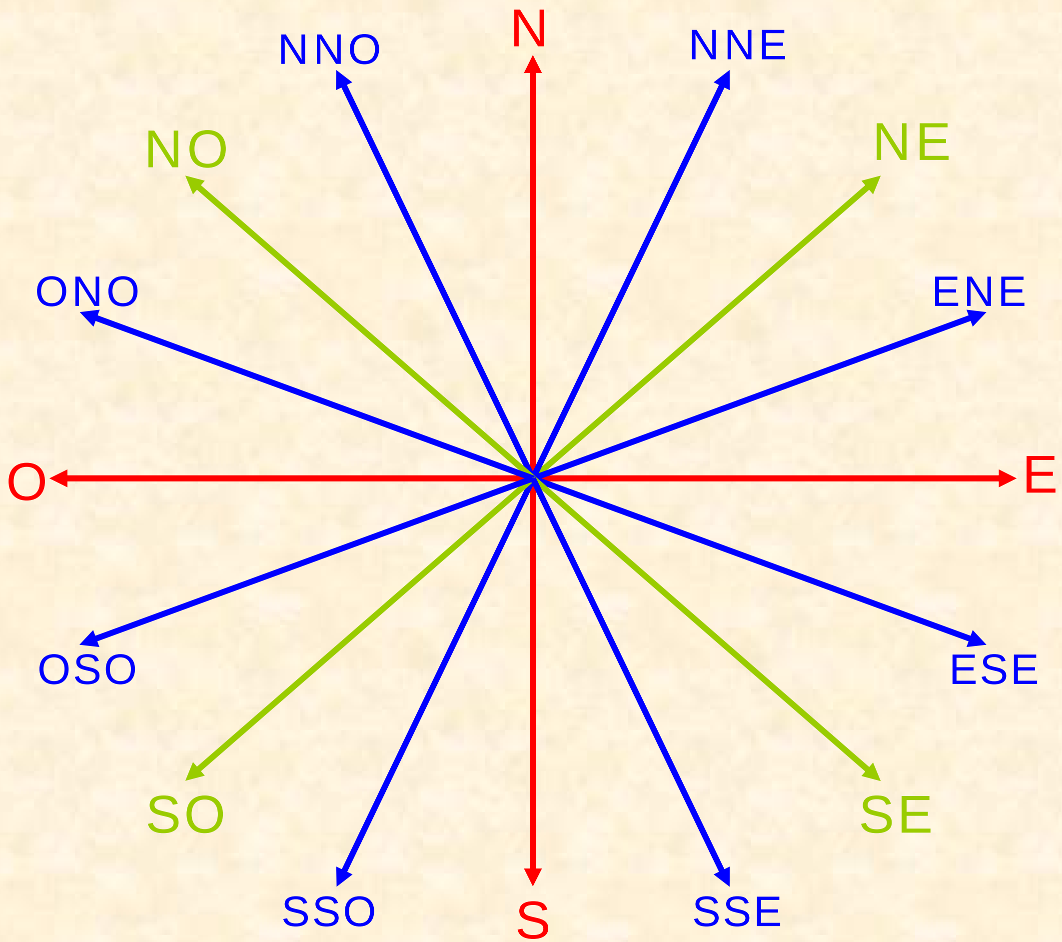
El rumbo de M respecto de P 27^{o} al este del sur



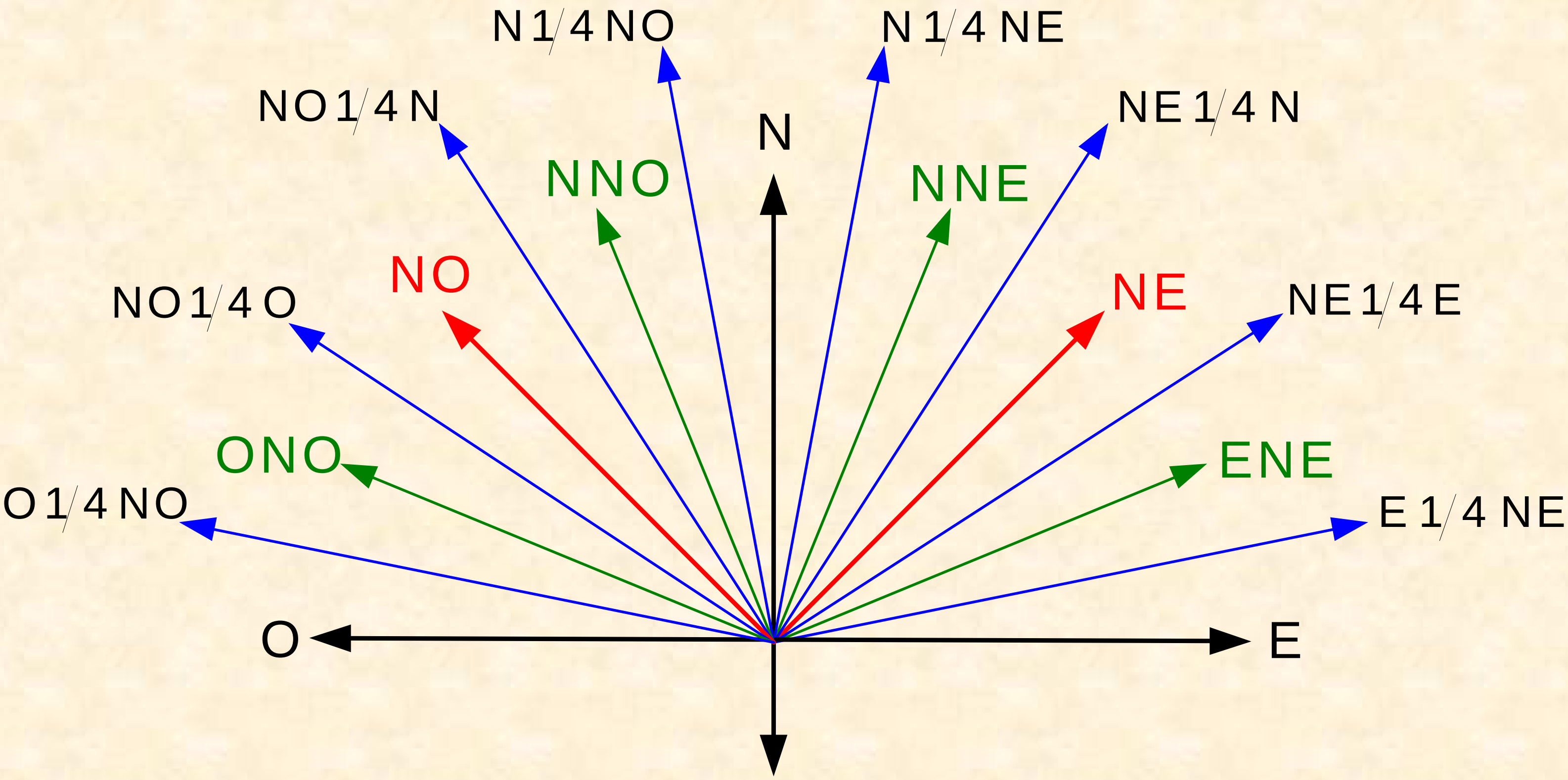
ROSA NÁUTICA

Gráfico que contiene 32 direcciones notables, cada dirección forma entre ellas un ángulo cuya medida es $11^{o}15'$

En el gráfico adjunto sólo se muestran 16 direcciones notables, cada una forma entre ellas un ángulo cuya medida es $22^{o}30'$



Las otras 16 direcciones se obtienen trazando las bisectrices de los 16 ángulos que se muestran en el gráfico anterior.



¿Cuánto mide el ángulo entre las direcciones NE1/4N y NO1/4O?

Rpta. 90º

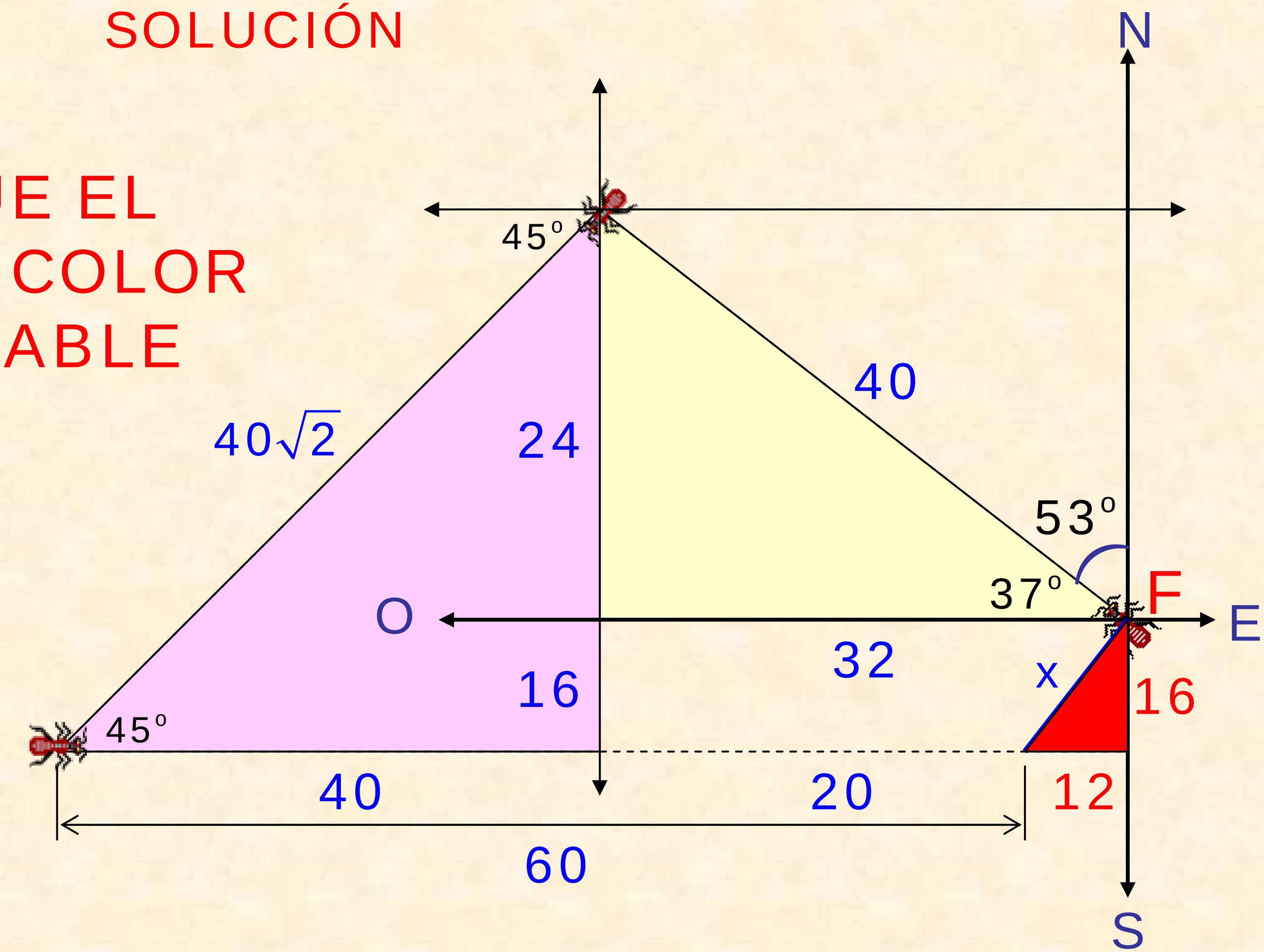
EJEMPLO :

Un insecto parte de un punto F y recorre 40 km en la dirección $N53^0O$ luego recorre $40\sqrt{2}$ km en la dirección SO, finalmente recorre 60 km hacia el este. ¿A qué distancia se encuentra el insecto de F ?

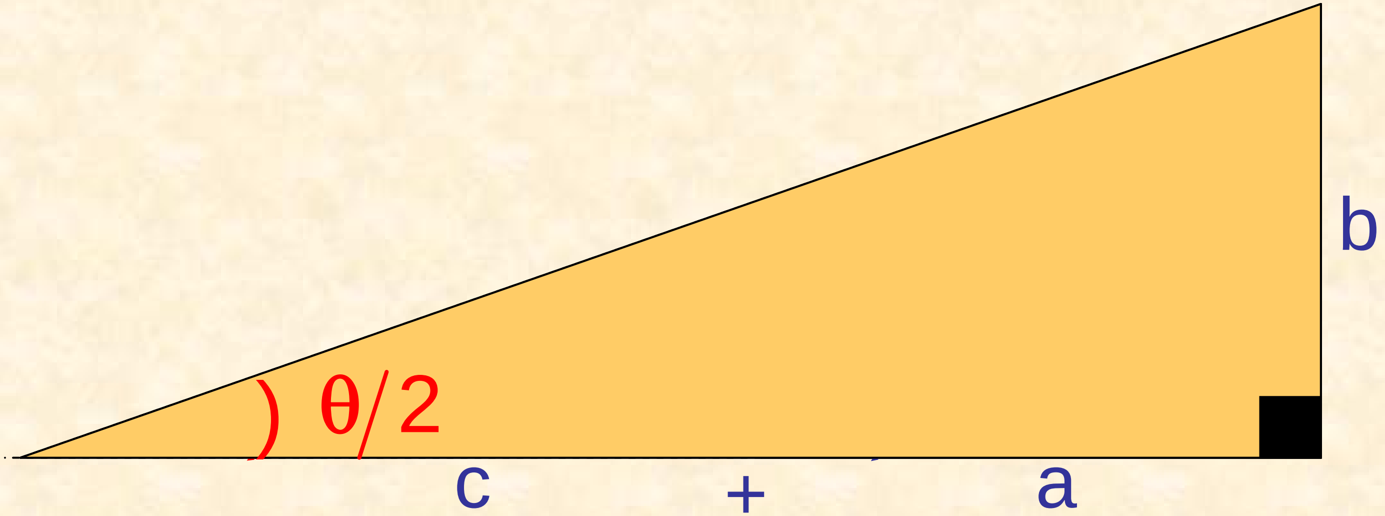
SOLUCIÓN

OBSERVA QUE EL TRIÁNGULO DE COLOR ROJO ES NOTABLE

X = 20



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA MITAD DE UN ÁNGULO AGUDO (método gráfico)

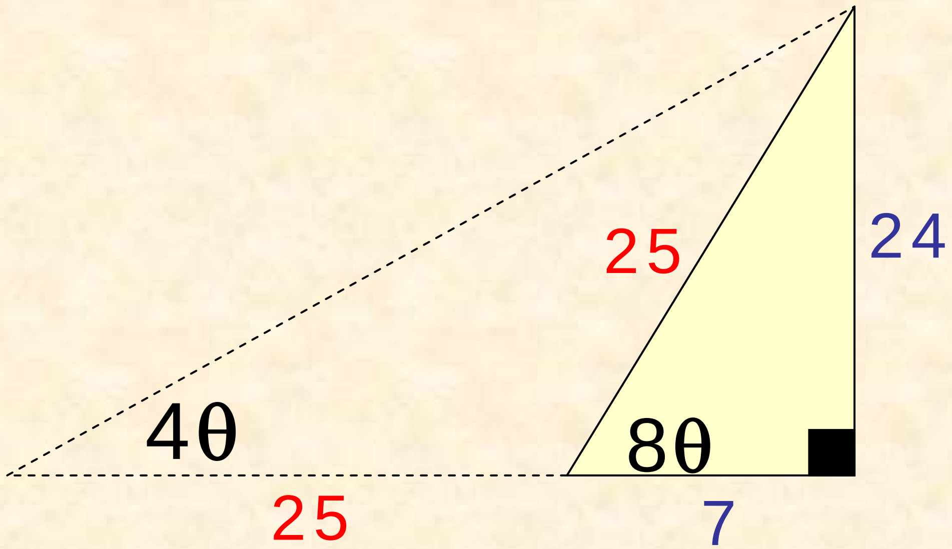


$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{c+a} = \frac{c-a}{b}$$

EJEMPLO :

Sabiendo que : tan $8\theta = 24/7$, calcula tan2θ

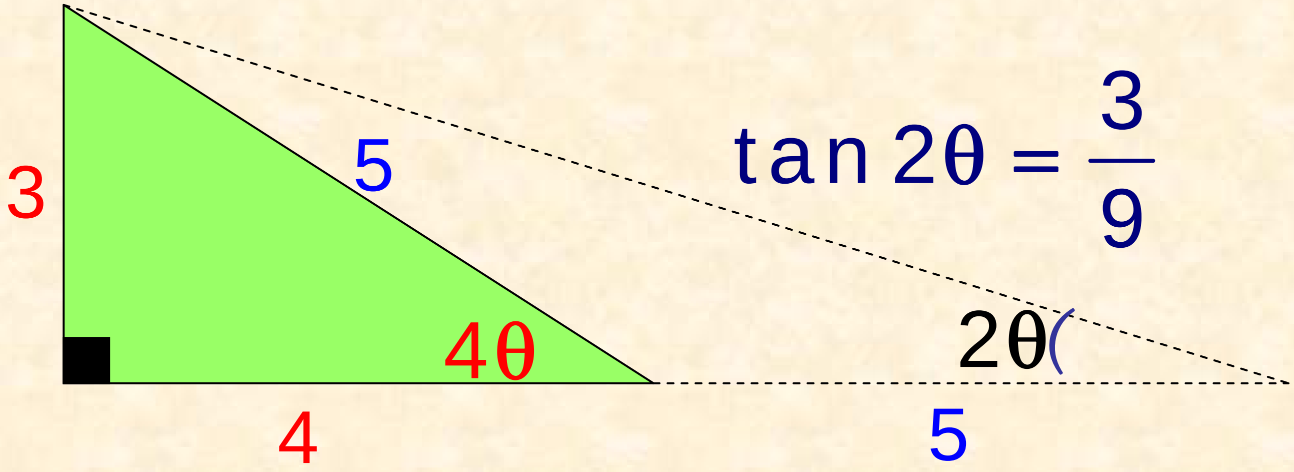
SOLUCIÓN



$$\tan 4\theta = \frac{24}{25+7}$$

$$\tan 4\theta = \frac{24}{32}$$

$$\tan 4\theta = \frac{3}{4}$$



$$\tan 2\theta = \frac{3}{9}$$

$$\tan 2\theta = \frac{1}{3}$$

Te recomiendo adquirir mi libro

TRIGONOMETRIA
TEORÍA Y PRÁCTICA

COLECCIÓN UNICIENCIA

EDITORIAL SAN MARCOS

Trigonometría

Frank Ayres

Colección Shaumm

b.rodriguez@ulagos.cl

brauliorod@gmail.com